

Ermittlung Druckzonenhöhe x im Zustand 2

Zur Ermittlung der Druckzonenhöhe stehen in der Literatur unterschiedliche Berechnungsansätze zur Verfügung.

Für einen einfach bewehrten Rechteckquerschnitt, ohne Druckbewehrung ($A_{s2} \approx 0$) und unter reiner Biegung ($N_{Ed} = 0$) werden insbesondere zwei Konzepte angewendet, die sich grundlegend in ihren Materialannahmen unterscheiden:

Druckzonenhöhe nach Eurocode 2 (plastischer Parabel-Rechteckblock)

- Dehnungsannahme: linearer Dehnungsverlauf über die Querschnittshöhe
- Spannungsannahme Beton: nichtlinear, nach Parabel-Rechteck-Block; das Hooke'sche Gesetz ($\sigma_c = \varepsilon_c \cdot E_{cm}$) gilt nicht im GZT
- Berechnung: Die Druckzonenhöhe wird so bestimmt, dass die Betonranddehnungen nicht überschritten werden ($\varepsilon_c \leq 3,5\%$) und Gleichgewicht zwischen Beton- Druckkraft und Stahl-Zugkraft herrscht.

Druckzonenhöhe mit Neutrallinienformel und Formeln nach Dutulescu (linear-elastischer Ansatz)

- Dehnungsannahme: linearer Dehnungsverlauf über die Querschnittshöhe
- Spannungsannahme Beton: linear, Beton voll elastisch mit $\sigma_c = \varepsilon_c \cdot E_{cm}$
- Berechnung: aus Dehnungsgleichheit und Kräftegleichgewicht ergibt sich eine geschlossene Lösung.
- Beachte: Da Festigkeitsbegrenzungen nicht berücksichtigt werden, kann die ermittelte Druckzonenhöhe x bei größeren Momenten zu Betonspannungen über der Grenze des EC2 führen (siehe auch Beispielrechnung in nachfolgender Abbildung ($\sigma_c = 1,63 \cdot f_{cd} > 1,0 \cdot f_{cd}$)).

Fazit:

- Der Eurocode 2 liefert eine plastisch geprägte Druckzonenhöhe, die das nichtlineare Materialverhalten des Betons, sowie die zulässigen Grenzdehnungen berücksichtigt. Damit entstehen realistische und bemessungssichere Ergebnisse im Grenzzustand der Tragfähigkeit (GZT).
- Die Neutrallinienformel bzw. die Formeln nach Dutulescu basieren auf einem linear-elastischen Spannungs-Dehnungs-Verhalten. Bei einem vorgegebenen Stahlquerschnitt und großen Biegemomenten führen diese Ansätze jedoch häufig zu Betonspannungen oberhalb der zulässigen EC2-Materialgrenzen und sind daher für den GZT nicht geeignet.
- Der Dutulescu-Ansatz eignet sich vor allem für den Gebrauchszustand, insbesondere dann, wenn die Betondruckzone nicht voll ausgenutzt wird. In diesen Fällen liefert der Ansatz eine schnelle und plausible Abschätzung der Druckzonenhöhe.

In der folgenden Abbildung 1 wird anhand eines Beispielquerschnitts und eines vorgegebenen Biegemoments ein Vergleich der beiden Berechnungskonzepte für die Druckzonenhöhe vorgenommen.

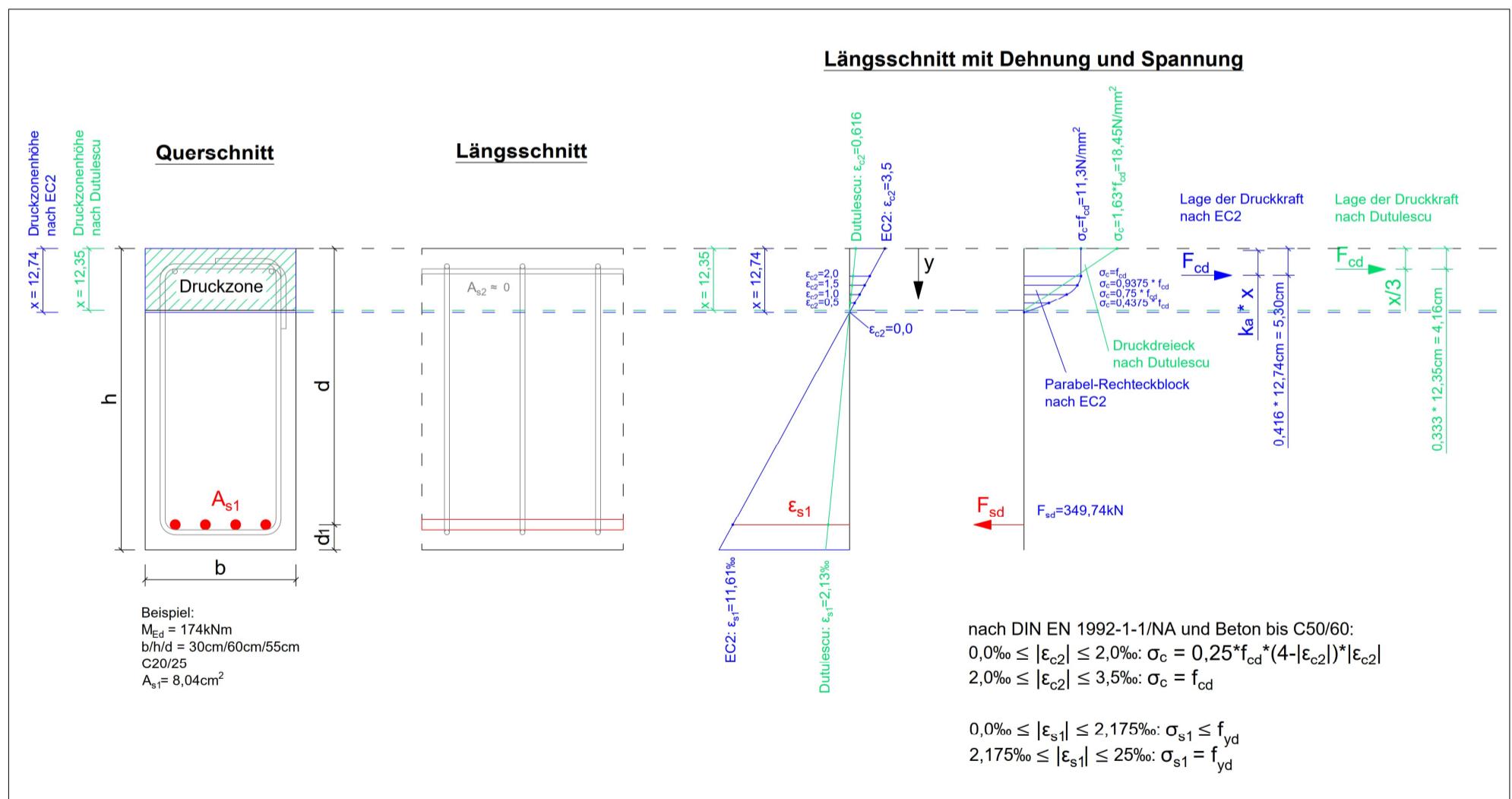


Abbildung 1: Darstellung Rechteckquerschnitt mit Druckzonenhöhe x

#1) Druckzonenformel (Parabel-Rechteckblock nach EC2)

Formel	Beispiel	Legende
$x = \frac{\sigma_s \cdot A_{s1}}{\alpha_v \cdot b \cdot f_{cd}} \text{ [cm]}$ für $ \varepsilon_c \leq 2,0\%: \alpha_v = \frac{1}{12} \cdot \varepsilon_c \cdot (6 - \varepsilon_c)$ für $ \varepsilon_c \geq 2,0\%: \alpha_v = \frac{3 \cdot \varepsilon_c - 2}{3 \cdot \varepsilon_c }$	$\alpha_v = \frac{3 \cdot 3,5\% - 2,0}{3 \cdot 3,5\%} = 0,81 \text{ []}$ $x = \frac{43,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 8,04 \text{cm}^2}{0,81 \cdot 30 \text{cm} \cdot 1,13 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} = 12,74 \text{cm}$ Stahldehnung über den Strahlensatz: $\varepsilon_{s1} = \frac{ \varepsilon_c }{x} \cdot d - \varepsilon_c = \frac{3,5\%}{12,74 \text{cm}} \cdot 55 \text{cm} - 3,5\% = 11,61\%$	$\sigma_s \text{ [kN/cm}^2\text{]} - \text{Spannung in der Zugbewehrung}$ $A_{s1} \text{ [cm}^2\text{]} - \text{Querschnittsfläche der Zugbewehrung}$ $\alpha_v \text{ []} - \text{Völligkeitsbeiwert}$ $b \text{ [cm]} - \text{Querschnittsbreite}$ $f_{cd} \text{ [kN/cm}^2\text{]} - \text{Bemessungswert der Betondruckfestigkeit}$ $d \text{ [cm]} - \text{statische Nutzhöhe}$
<u>Hinweise:</u> i.d.R. wird die Betondruckzone ausgenutzt: $ \varepsilon_c = 3,5\%: \alpha_v = 0,81$ i.d.R. wird der Stahlquerschnitt ausgenutzt: $ \varepsilon_{s1} \geq 2,175\%: \sigma_s = 43,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$		

Herleitung

Betondruckkraft: $F_{cd} = \alpha_v \cdot f_{cd} \cdot x \cdot b \text{ [kN]}$

Stahlzugkraft: $F_{sd} = \sigma_s \cdot A_{s1} \text{ [kN]}$

Kräftegleichgewicht: $F_{cd} = F_{sd}$

Gleichsetzen: $\rightarrow \alpha_v \cdot f_{cd} \cdot x \cdot b = \sigma_s \cdot A_{s1}$

Auflösen nach x: $\rightarrow x = \frac{\sigma_s \cdot A_{s1}}{\alpha_v \cdot b \cdot f_{cd}} \text{ [cm]}$

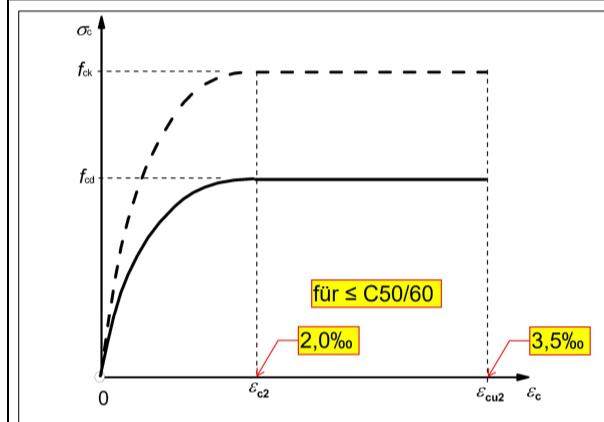


Bild 3.3 — Parabel-Rechteck-Diagramm für Beton unter Druck

Abbildung 2: Auszug DIN EN 1992-1-1:2011-01

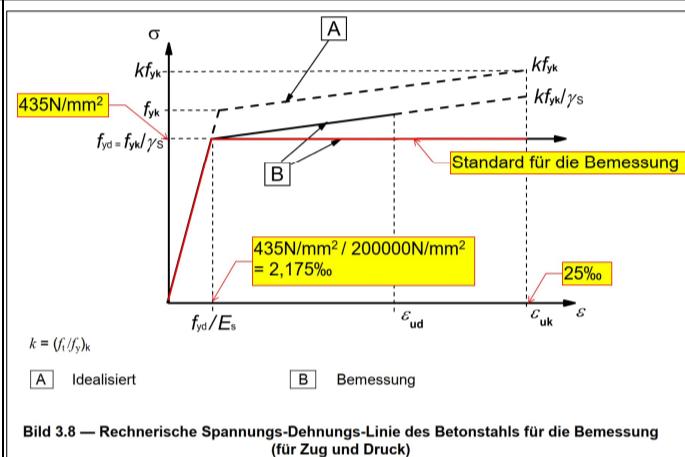


Bild 3.8 — Rechnerische Spannungs-Dehnungs-Linie des Betonstahls für die Bemessung (für Zug und Druck)

Abbildung 3: Auszug DIN EN1992-1-1:2011-01

#2) Neutrallinienformel für Rechteckquerschnitte (quadratische Lösung)

Formel	Beispiel	Legende
$x = \frac{\alpha_e \cdot A_{s1}}{b} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot d}{\alpha_e \cdot A_{s1}}} \right) [\text{cm}]$ <p>Hinweise:</p> <ul style="list-style-type: none"> Die Formel liefert die Druckzonenhöhe für den Zustand, bei dem die Beton- und Stahlspannungen rein aus dem linearen elastischen Dehnungsdreieck resultieren. keine Plastifizierung in der Betondruckzone kein Parabel-Rechteckblock wie im EC2 keine Begrenzung durch $\varepsilon_{cu2} = 3,5\%$ keine Begrenzung durch $f_{yd} = 435 \text{ N/mm}^2$ 	$\alpha_e = \frac{200.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{30.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 6,67$ $x = \frac{6,67 \cdot 8,04 \text{ cm}^2}{30 \text{ cm}} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 30 \text{ cm} \cdot 55 \text{ cm}}{6,67 \cdot 8,04 \text{ cm}^2}} \right) = 12,35 \text{ cm}$ <p>der innere Hebelarm ergibt sich infolge der dreiecksförmigen Spannung: $z = d - \frac{x}{3} = 55 \text{ cm} - \frac{12,35 \text{ cm}}{3} = 50,88 \text{ cm}$</p> <p>die Betondruckspannung ergibt sich: $\sigma_c = \frac{2 \cdot M_{Ed}}{b \cdot x \cdot z} = \frac{2 \cdot 17400 \text{ kNm}}{30 \text{ cm} \cdot 12,35 \text{ cm} \cdot 50,88 \text{ cm}} = 1,85 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$</p> <p>Achtung: diese Betondruckspannung ist größer als die zulässige Spannung: $f_{cd} = 1,13 \text{ kN/cm}^2$ (C20/25)</p> <p>Die maximale Betondehnung kann mit dem Hooke'schen-Gesetz ermittelt werden:</p> $\varepsilon_c = \frac{\sigma_{c,\max}}{E_{cm}} = \frac{1,85 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{3000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} = 0,616\%$ <p>Stahldehnung über den Strahlensatz: $\varepsilon_{s1} = \frac{ \varepsilon_c }{x} \cdot d - \varepsilon_c = \frac{0,616\%}{12,35 \text{ cm}} \cdot 55 \text{ cm} - 0,616\% = 2,13\%$</p>	$\alpha_e [\cdot] - \text{Elastizitätsmodulverhältnis: } \alpha_e = \frac{E_s}{E_{cm}}$ $E_s [\text{N/mm}^2] - \text{Elastizitätsmodul für Betonstahl } (E_s = 200000 \text{ N/mm}^2)$ $E_{cm} [\text{N/mm}^2] - \text{mittlerer Elastizitätsmodul des Betons}$ $A_{s1} [\text{cm}^2] - \text{Querschnittsfläche der Zugbewehrung}$ $b [\text{cm}] - \text{Querschnittsbreite}$ $d [\text{cm}] - \text{statische Nutzhöhe}$

Herleitung

Dehnungen und Spannungen

<p>Dehnung für lineare Biegung: $\varepsilon(y) = \kappa \cdot (y - x)$</p> <p><u>Beton-Dehnung:</u> $\varepsilon_c(y) = \kappa \cdot (x - y)$ für: $0 \leq y \leq x$</p> <p><u>Stahl-Dehnung:</u> $\varepsilon_s = \kappa \cdot (d - x)$</p> <p>Zur Info: Am oberen Druckrand: $y = 0: \varepsilon = -\kappa \cdot x$ An der Neutralachse: $y = x: \varepsilon = 0$ Auf Höhe der Zugbewehrung: $y = d: \varepsilon = \kappa \cdot (d - x)$</p> <p><u>Beton-Spannung:</u> $\sigma_c(y) = E_{cm} \cdot \varepsilon_c(y) = E_{cm} \cdot \kappa \cdot (x - y)$</p> <p><u>Stahl-Spannung:</u> $\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s = E_s \cdot \kappa \cdot (d - x) = \alpha_e \cdot E_{cm} \cdot \kappa \cdot (d - x)$</p>	<p>$\kappa [1/\text{cm}] - \text{Krümmung}$</p> <p>$y [\text{cm}] - \text{Abstand gemessen von der Druckseite}$</p> <p>$x [\text{cm}] - \text{Lage der Neutralachse}$</p> <p>$\alpha_e [\cdot] - \text{Elastizitätsmodulverhältnis: } \alpha_e = \frac{E_s}{E_{cm}}$</p> <p>$E_s [\text{N/mm}^2] - \text{Elastizitätsmodul für Betonstahl } (E_s = 200000 \text{ N/mm}^2)$</p> <p>$E_{cm} [\text{N/mm}^2] - \text{mittlerer Elastizitätsmodul des Betons}$</p>
--	--

Innere Kräfte

<p>Betondruckkraft: $F_{cd} = \int_0^x \sigma_c(y) \cdot b \cdot dy$</p> $\rightarrow F_{cd} = \int_0^x E_{cm} \cdot \kappa \cdot (x - y) \cdot b \cdot dy \rightarrow F_{cd} = E_{cm} \cdot \kappa \cdot b \cdot \int_0^x (x - y) \cdot dy$ $\rightarrow F_{cd} = E_{cm} \cdot \kappa \cdot b \cdot \left[x \cdot y - \frac{y^2}{2} \right]_0^x$ $\rightarrow F_{cd} = E_{cm} \cdot \kappa \cdot b \cdot \left[x^2 - \frac{x^2}{2} \right] \rightarrow F_{cd} = E_{cm} \cdot \kappa \cdot b \cdot \frac{x^2}{2}$	<p>Stahlzugkraft: $F_{sd} = \sigma_s \cdot A_s$ $\rightarrow F_{sd} = \alpha_e \cdot E_{cm} \cdot \kappa \cdot (d - x) \cdot A_s$ $\rightarrow F_{sd} = \alpha_e \cdot E_{cm} \cdot \kappa \cdot A_s \cdot (d - x)$</p>
--	--

Kräftegleichgewicht

$$F_{cd} = F_{sd}$$

$$\rightarrow E_{cm} \cdot \kappa \cdot b \cdot \frac{x^2}{2} = \alpha_e \cdot E_{cm} \cdot \kappa \cdot A_s \cdot (d - x)$$

$$\rightarrow b \cdot \frac{x^2}{2} = \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x)$$

$$\rightarrow b \cdot x^2 = 2 \cdot \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x)$$

Umformen zur quadratischen Gleichung:
 $\rightarrow b \cdot x^2 - 2 \cdot \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x) = 0$
 $\rightarrow b \cdot x^2 + 2 \cdot \alpha_e \cdot A_s \cdot x - 2 \cdot \alpha_e \cdot A_s \cdot d = 0$

Lösung mit der Mittennachtsformel

$$x = \frac{-(2 \cdot \alpha_e \cdot A_s) \pm \sqrt{(2 \cdot \alpha_e \cdot A_{s1})^2 - 4 \cdot b \cdot (-2 \cdot \alpha_e \cdot A_{s1} \cdot d)}}{2 \cdot b} \rightarrow x = \frac{-(2 \cdot \alpha_e \cdot A_{s1})}{2 \cdot b} \pm \frac{\sqrt{4 \cdot (\alpha_e \cdot A_{s1})^2 + 4 \cdot b \cdot 2 \cdot \alpha_e \cdot A_{s1} \cdot d}}{2 \cdot b}$$

$$\rightarrow x = \frac{-(2 \cdot \alpha_e \cdot A_{s1})}{2 \cdot b} \pm \frac{\sqrt{4 \cdot (\alpha_e \cdot A_{s1})^2 + \left[1 + \frac{b \cdot 2 \cdot d}{\alpha_e \cdot A_{s1}} \right]}}{2 \cdot b} \rightarrow x = \frac{-(2 \cdot \alpha_e \cdot A_{s1})}{2 \cdot b} \pm \frac{2 \cdot \alpha_e \cdot A_{s1} \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot d}{\alpha_e \cdot A_{s1}}}}{2 \cdot b}$$

kürzen: $\rightarrow x = \frac{-(\alpha_e \cdot A_{s1})}{b} \pm \frac{\alpha_e \cdot A_{s1} \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot d}{\alpha_e \cdot A_{s1}}}}{b}$

ausklammern Bewehrungsterm: $\rightarrow x = \frac{-(\alpha_e \cdot A_{s1})}{b} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot d}{\alpha_e \cdot A_{s1}}} \right] \rightarrow x = \frac{(\alpha_e \cdot A_{s1})}{b} \cdot \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot d}{\alpha_e \cdot A_{s1}}} \right]$

#3) Formel von Dutulescu

Formel	Legende
$x = -\bar{B}_1 + \sqrt{\bar{B}_1^2 - \bar{C}} [\text{cm}]$ <p>mit: $\bar{B}_1 = \frac{1}{b} \cdot \alpha_e \cdot A_{s1}$ $\bar{C} = -\frac{2}{b} \cdot \alpha_e \cdot A_{s1} \cdot d$</p>	<p>$b [\text{cm}] - \text{Querschnittsbreite}$</p> <p>$\alpha_e [\cdot] - \text{Verhältnis der E-Moduli; } \alpha_e = E_s/E_c$</p> <p>$E_s [\text{N/mm}^2] - \text{Elastizitätsmodul für Betonstahl } (E_s = 200000 \text{ N/mm}^2)$</p> <p>$E_{cm} [\text{N/mm}^2] - \text{mittlerer Elastizitätsmodul des Betons}$</p> <p>$A_{s1} [\text{cm}^2] - \text{Querschnittsfläche der Zugbewehrung}$</p> <p>$d [\text{cm}] - \text{statische Nutzhöhe}$</p>

Herleitung

Die Herleitung erfolgt analytisch analog #2)