Energiebilanz:

- z entgegen der Gravitation
- Lage ist egal

1. KOS wählen
2. Nullniveau für Lageenergie (z)
3. Energien in 2 Punkten aufstellen

3.1 Kinetische Energie

$T_{Trans.} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_S^2$ | S: Schwerpunkt

$T_{Rot.} = \frac{1}{2} \cdot J^{(S)} \cdot \dot{\varphi}^2$ $\Big\}$ $T = T_{Trans.} + T_{Rot.}$

Alternativ nur Rot. um Momentanpol:

$T = \frac{1}{2} \cdot J^{(M)} \cdot \dot{\varphi}^2$

3.2 Potentielle Energie

$V_{Lage} = m \cdot g \cdot z$ $V_{Feder} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot u^2$ bzw. $\frac{1}{2} \cdot k \cdot \varphi^2$

3.3 Arbeit der Nichtpotentialkräfte

$W|_1^2 = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{F}^* \, d\vec{x} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^* \, d\varphi$

R = N • μ
$W|_1^2 < 0$ bei Reibung
$W|_1^2 > 0$ bei Antriebskraft

4. Energiebilanzgleichung

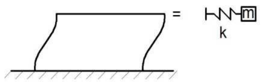
Federn und sonstige Kräfte:

Federkraft: $c \cdot x$ Dämpferkraft: $d \cdot \dot{x}$

Federsteifigkeit: $c = \frac{E \cdot A}{l} = \frac{F}{\Delta l}$

Parallelschaltung: $c^* = \sum c_i$

Reihenschaltung: $\frac{1}{c^*} = \sum \frac{1}{c_i}$



= k $k = 2 \times \frac{12 \cdot E \cdot I}{h}$

gelenkiger Einfeldträger: $k = \frac{48 \cdot E \cdot I}{L^3}$

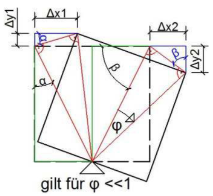
Kragarm: $k = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L^3}$

Beidseitig eingespannter Einfeldträger: $k = \frac{192 \cdot E \cdot I}{L^3}$

Haftgrenzbedingung $H_{max} = \mu_0 \cdot N$

Bedingung für Haften $T \leq \mu \cdot N$

Sonstiges:



gilt für φ <<1

Frage nach statischer Ruhelage: → $\dot{\varphi} = 0$

sin (x+y) = sin (x) • cos (y) + cos (x) • sin (y)

sin (x-y) = sin (x) • cos (y) - cos (x) • sin (y)

cos (x+y) = cos (x) • cos (y) - sin (x) • sin (y)

cos (x-y) = cos (x) • cos (y) + sin (x) • sin (y)

Synthetische Methode:

1. KOS wählen (x,y und φ)
2. Freischnitt in allgemeiner Lage
   - alle eingeprägten Kräfte + Zwangskräfte
   - Koordinate x aus Ruhelage: m • g muss bei Federsystemen nicht berücksichtigt werden
3. Massenträgheitsmoment J bestimmen (s.u.)
4. Schwerpunktsätze:

$\sum F_{ix} = m \cdot \ddot{x}_S$ bzw. $\sum F_{ir} = m \cdot a_r$

$\sum F_{iy} = m \cdot \ddot{y}_S$ bzw. $\sum F_{it} = m \cdot a_t$

$\sum M^{(S)} = J^{(S)} \cdot \ddot{\varphi}$

Alternativ Rotation um einen raumfesten Punkt:

$\sum M^{(M)} = J^{(M)} \cdot \ddot{\varphi}$

5. Eventuell Bindungsgleichungen aufstellen

$\ddot{x}_S = r \cdot \ddot{\varphi}$ $\ddot{y}_S = r \cdot \dot{\varphi}$ (Normalbeschl.)

- x= r • φ gilt nur bei Rollen
- Strecken sind immer positiv
- Kräfte immer positiv wenn diese in Richtung des KOS zeigen.
- Bei Freischnitt: Haltekraft antragen wenn ein Körper rollt.

Massenträgheitsmoment:

1. Linien- oder punktförmiges Element (h = 0):

$J = \frac{m \cdot \Delta x^2}{12} + m \cdot x^2$

x_s = Abstand zw. Schwerpunktsachse und Rotationsachse.
m = ρ • A • Δx
Δx = Länge des Elements

2. Element mit h ≠ 0:

$J = I_p \cdot \rho \cdot t + m \cdot x^2$

Rechteck: $I_p = I_y + I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} + \frac{b^3 \cdot h}{12}$ Kreis: $I_p = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$

Zylinder: $J = \frac{\pi \cdot R^4}{2} \cdot \rho \cdot t + m \cdot x_s^2$ Kugel: $J = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$

ρ = Dichte (m/V) t = Dicke (aus der Ebene)

Schwingung mit 2 Freiheitsgraden

1. Bestimmung der bewegungsgleichung

→ $M \cdot \ddot{\vec{q}} + K \cdot \vec{q} = \vec{0}$ (für Q* = 0)

m: z.B. [t]
k: z.B. [KN/m]

2. det $(-\omega^2 \cdot M + K) =! 0$

→ $\begin{pmatrix} -\omega^2 \cdot m_{11} + k_{11} & -\omega^2 \cdot m_{12} + k_{12} \\ -\omega^2 \cdot m_{21} + k_{11} & -\omega^2 \cdot m_{22} + k_{22} \end{pmatrix}$

Hinweis:
a • d – b • c

3. Amplitudenverhältnisse

$K_1 = \frac{m_{11} \cdot (\omega_1)^2 - k_{11}}{k_{12} - m_{12} \cdot (\omega_1)^2}$ $K_2 = \frac{m_{11} \cdot (\omega_2)^2 - k_{11}}{k_{12} - m_{12} \cdot (\omega_2)^2}$

4. Eigenvektoren

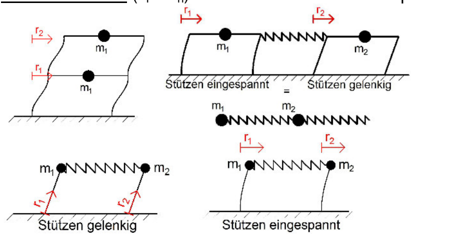
$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ K_1 \end{bmatrix}$ (1. Grundschwingung) $\Phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ K_2 \end{bmatrix}$ (1. Oberschwingung)

5. Eigenformen skizzieren

Lagrange:

1. FHG bestimmen

2. Ortsvektoren ($r_1 - r_n$) zu den einzelnen Schwerpunkten



3. kinetische Energie

$T_{Trans.} = \sum_i^m \frac{1}{2} \cdot m \cdot |\dot{\vec{r}}_i|^2$

$T_{Rot.} = \sum_i^m \frac{1}{2} \cdot J^{(S)} \cdot \dot{\varphi}_i^2$

$J^{(S)}$ immer für den jeweiligen Schwerpunkt

$T = T_{Trans.} + T_{Rot.}$

4. Potentielle Energie /Dämpfer:

$V_{Feder,i} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot u^2$ bzw. $\frac{1}{2} \cdot K \cdot \varphi^2$

$V_{Feder} = \sum_i^m V_{Feder,i}$ $D = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \dot{x}^2$

$\dot{x}$: Dämpferweg, abgeleitet nach der Zeit

- Die potentielle Energie der Feder ist positiv wenn sie entgegen der Bewegungsrichtung wirkt.

$V_{Lage} = \sum_i^m m_i \cdot g \cdot h_i$

- Nullniveau im Ursprung des KOS
- z-Achse entgegen der Gewichtskraft

5. generalisierte Kräfte:

$Q_k^* = \sum_j^m \vec{F}_j^* \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$

r_j: Radius vom Ursprung des KOS zum Kraftangriffspunkt
- Das Skalarp. ergibt einen Wert

6. Lagrange Gleichungen:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_k^*$

nach Berechnen von $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}$ kann linearisiert werden.

Linearisieren:

sin (φ) = φ	sin² (φ) = 0	sin (φ) • $\ddot{\varphi}$ ≈ 0
cos (φ) ≈ 1 - $\frac{1}{2}$ • φ²	cos (φ) = 1	cos²(φ) = 1
φ • φ = 0	$\dot{\varphi}$ • φ = 0	

allgemein Taylorreihe: f(x) = f(a) + f'(a) • (x-a) + $\frac{1}{2!}$ • f''(a) • (x-a²)

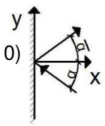
Stoß einer Masse

e = 1

$\bar{v}_y = v_y$ (da $\widehat{F_y}$= 0)

$\bar{v}_x = - v_x$

$\alpha = \bar{\alpha}$



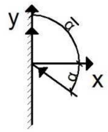
Stoß einer Masse

e = 0 (vollplastisch)

$\bar{v}_y = v_y = v \cdot \sin(\alpha)$

$\bar{v}_x = 0$

$\bar{\alpha} = \frac{\pi}{2}$

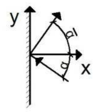


Stoß einer Masse

e ≠ 0 & e ≠ 1

$\bar{v}_y = v_y = v \cdot \sin(\alpha)$

$\bar{v}_x = - e \cdot v_x = - e \cdot \cos(\alpha) \cdot v$

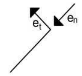


Kartesische Koordinaten

Beschleunigung a, Geschwindigkeit v und Strecke x sind negativ wenn diese entgegen der KOS Richtung zeigen (vgl. Ü4/1c)

Natürliche Koordinaten

$a = a_t \cdot \vec{e}_t + a_n \cdot \vec{e}_n$



$a_t = \dot{v}$

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$

$v = \dot{s} \cdot \vec{e}_t$

e_t: zeigt in Richtung der Tangente
e_n: zeigt in Richtung der Hauptnormalen
e_t und e_n sind unabhängig von der Zeit

$\dot{v} = \ddot{s}$ Tangentialbeschleunigung
$v = \dot{s}$ = Geschwindigkeit in Bahnrichtung
ρ = Krümmung (beim Kreis ρ = R)

Polarkoordinaten:

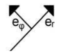
$v_t = r \cdot \dot{\varphi}$

$v_n = \dot{r}$ (0 bei Kreis)

e_φ: zeigt in Richtung von φ
e_r: zeigt nach außen
!! e_φ und e_r sind abhängig von der Zeit

$a_t = (r \cdot \ddot{\varphi} + \underbrace{2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi}}_{0 \text{ bei Kreis}}) \cdot e_\varphi$ $a_n = (\underbrace{\ddot{r}}_{0 \text{ bei Kreis}} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot e_r$

$\dot{\varphi} = \omega$ = Winkelgeschwindigkeit [1/s]
$\ddot{\varphi} = \dot{\omega}$ = Winkelbeschleunigung [1/s²]



Allgemein:

$\dot{e}_r = \dot{\varphi} \cdot e_\varphi$ $\dot{e}_\varphi = - \dot{\varphi} \cdot e_r$ $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dr}{dr}$

$e_\varphi = - \sin(\varphi) \cdot e_x + \cos(\varphi) \cdot e_y$ $\varphi = \Omega \cdot t$

$e_x = \cos(\varphi) \cdot e_r - \sin(\varphi) \cdot e_\varphi$ $\dot{\varphi} = \Omega$

→ konstante Beschleunigung → linearer Geschwindigkeitsverlauf

→ parabolisches Weg-Zeit Diagramm

Stoß zweier Massen:

$e = \frac{\overline{v_{2x}} - \overline{v_{1x}}}{v_{1x} - v_{2x}} = \frac{\text{relative Trennungsgeschwindigkeit}}{\text{relative Annäherungsgeschwindigkeit}}$

$e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$

Impulssatz für m_1:

x-Richtung: $m_1 \cdot (\overline{v_{1x}} - v_{1x}) = - \widehat{F_x}$

y-Richtung: $m_1 \cdot (\overline{v_{1y}} - v_{1y}) = - \widehat{F_y}$

Impulssatz für m_2:

x-Richtung: $m_2 \cdot (\overline{v_{2x}} - v_{2x}) = \widehat{F_x}$

y-Richtung: $m_2 \cdot (\overline{v_{2y}} - v_{2y}) = \widehat{F_y}$

Sonderfall gerader zentrischer Stoß:

$\overline{v_1} = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - e \cdot m_2 \cdot (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$

$\overline{v_2} = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 + e \cdot m_1 \cdot (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$

Hinweis: die Stoßnormale geht immer durch die beiden Schwerpunkte.
KOS im Stoßpunkt.